A METHOD TO APPROXIMATE A SPATIAL SURFACE USING A BÉZIER BI-CUBIC SURFACE

APROXIMAREA FORMEI SPAȚIALE A CALAPODULUI CU SUPRAFEȚE BICUBICE BÉZIER

Mariana DRISCU*

"Gh. Asachi" Technical University, Iasi, Faculty of Textile-Leather and Industrial Management,
Technology and design of leather and replacement products,
53 Dimitrie Mangeron St., Tex 6 building, Iasi-700050, email: mcocea@tex.tuiasi.ro

A METHOD TO APPROXIMATE A SPATIAL SURFACE USING A BÉZIER BI-CUBIC SURFACE

ABSTRACT. The paper presents a method to approximate a suite of points, obtained through a digitizing process of a 3D shape, either concave or convex, limited by 4 3D curves, with a Bézier bi-cubic surface. In obtaining the method, the curves and Bézier bi-cubic surfaces have been defined as: a 3D Bézier bi-cubic curve can be defined by using four control points, two of them fixed (called knots) and the other two placed on the tangents drawn from the curve to each knot (called control points); a Bézier bi-cubic surface can be defined using 16 points placed as follows: 4 points are the limits of the curves that limit the surface (the knots), 12 points are placed on the tangents to the 4 marginal curves drawn from the knots and other 4 points are situated on the tangents from the knots to the surface (called surface control points). This paper presents the development of a new method for defining the control points on the tangents (to the group of points that define the marginal curves, and to the suite of points from the inner domain limited by the 4 curves) with the forming of that Bézier bi-cubic surface, whose maximum point passes through the maximum point of the initial point set.
KEY WORDS: curve, surface, knot, tangent, point.

APROXIMAREA FORMEI SPAȚIALE A CALAPODULUI CU SUPRAFEȚE BICUBICE BÉZIER

REZUMAT. În prezenta lucrare este prezentată o metodă pentru aproximarea suprafeței spațiale a calapodului, format „nor de puncte", cu suprafețe bicubice Bézier. La baza metodei stau tehnici de modelare a unei mulțimi de puncte, aparținând unei forme tridimensionale concave sau convexe, mărginită de 4 curbe 3D, cu o suprafață bicubică Bézier, cum ar fi: o curbă bicubică Bézier 3D este definită prin intermediul a 4 puncte de control: două fixe, numite noduri, şi alte două care se poziționează pe tangentele duse la curba din fiecare nod, numite puncte de control; o suprafață bicubică Bézier este definită prin intermediul a 16 puncte poziționate astfel: 4 puncte sunt extremitățile curbelor ce mărginesc suprafața, numite noduri, 12 puncte sunt situate pe tangentele la cele 4 curbe marginale duse din noduri şi alte 4 puncte sunt situate pe tangentele din noduri la suprafața (mulțimea punctelor) de aproximat, numite punctele de control ale suprafeței. În lucrare se elaborează o metodă originală pentru precizarea punctelor de control ce aparțin tangentelor la mulțimea punctelor ce definesc curbele marginale şi la mulțimea punctelor din interiorul domeniului mărginit de cele 4 curbe, cu generarea acelei suprafețe bicubice Bézier a cărui punct trece prin punctul de maxim al mulțimii punctelor inițiale.
CUVINTE CHEIE: curbă, suprafață, nod, tangentă, punct.

L'ESTIMATION DE LA FORME SPATIALE DU MOULE DE CHAUSSURE À L'AIDE DES SURFACES BI-CUBIQUES BÉZIER

RÉSUMÉ. Dans cet article on présente une méthode pour l'estimation de la surface spatiale du moule de chaussure, un « ensemble de points » avec des surfaces bi-cubiques Bézier. La méthode est fondée sur des techniques de modélisation d'un ensemble de points appartenant à une forme tridimensionnelle concave ou convexe, délimitée par 4 courbes 3D, avec une surface bi-cubique Bézier, telle que: une courbe bi-cubique Bézier 3D est définie par l'intermède de 4 points de contrôle: 2 points fixes, appelés nœuds, et deux positionnés sur les tangentes tracées à la courbe de chaque nœud, appelées points de contrôle; une surface bi-cubique Bézier est définie par 16 points positionnés comme suit: 4 points sont les extrémités des courbes qui délimitent la surface, appelés nœuds, 12 points sont situés sur les tangentes aux 4 courbes marginales tracées des nœuds et autres 4 points sont situés sur les tangentes de nœuds sur la surface (l'ensemble de points) à estimer, appelés les points de contrôle de la surface. Dans l'article, on développe une méthode originale pour spécifier les points de contrôle qui appartiennent aux tangentes à l'ensemble des points définissant les courbes marginales et l'ensemble de points à l'intérieur de la zone délimitée par les 4 courbes, en générant la surface bi-cubique Bézier dont le point passe par le point de maximum de l'ensemble initial de points.
MOTS CLÉS: courbe, surface, nœud, tangente, point.

INTRODUCTION

Using the computer to design a three-dimensional body involves the most advanced designing techniques, starting with the definition of its spatial geometry to obtaining the final numerical formula [2]. These activities are required for developing a tool for designing irregular 3D shapes and

INTRODUCERE

Proiectarea unui corp tridimensional, cu ajutorul calculatorului, cuprinde cele mai avansate tehnici, de la definirea geometriei formei spațiale până la obținerea formei numerice finale. Această activitate este necesară pentru elaborarea unui instrument de lucru în sesiuni de proiectare a formelor spațiale 3D neregulate şi pentru

** Correspondence to: Mariana DRIŞCU, "Gh. Asachi" Technical University, Iasi, Faculty of Textile-Leather and Industrial Management, Section: Technology and design of leather and replacement products,53 D-trie Mangeron St., Tex 6 building, Iasi-700050, email: mcocea@tex.tuiasi.ro*

also for developing prototypes with computer controlled machines.

Designing a spatial shape in assisted sessions is reduced to a problem of interpolation of the spatial shapes:

- given a finite number of points on the surface or in its surrounding area, the series of points must be approximated by using interpolated surfaces. Finally, the result: a numeric pattern, must be as close as possible of the real formula.

The paper introduces a methodology for the approximation of a group of points to a concave-convex surface, a portion of a 3D body that has to be modeled on computer using a method based on Bézier bi-cubic surfaces.

In the literature some fitting methods of the point sum are elaborated with interpolator functions such as: Spline, B-spline, Hermite, and Bézier. This domain was studied and is studied by specialists in computer-assisted graphics. For example, Jaroslav Makerle, in the paper '*2D and 3D finite element meshing and remeshing', A bibliography* (1990-2001), presents approximately 1727 paper titles that comprise modeling techniques of the irregular and 2D and 3D shapes [1].

To model the spatial shape of the last, interpolating Bézier functions are used in the paper. These generate 3D surfaces frequently used in computer-assisted graphics.

The first user of these surfaces is French engineer Pierre Bézier, who defined and applied them in 1962 in automobile designing [3]. Due to their large possibilities of utilization and their flexibility and properties, these functions have been used in different applications of 2D and 3D modeling [4, 5]. The modeling method of these curves in designing varies from user to user [6, 7, 9, 12]. Another method similar to the one proposed, to approximate an irregular margin numerical digitized through digitization, is presented [10], in paper: *'Curvature and the fairness of curves and surfaces'*.

The method can be used to approximate portions of a 3D body [9, 11, 12]. For this, we must set the limits of concave-convex shapes limited by 4 curves on the body's surface, to create the numeric pattern of the surface. Afterwards, approximate each elementary surface with a Bézier bi-cubic surface with the

realizări de prototipuri cu maşini CNC.

Proiectarea unei forme spațiale în sesiuni asistate este, de fapt, o problem de interpolare a formelor spațiale anume:

- se cunoaşte un numr finit de puncte aparținând geometriei formei culese de pe suprafața acesteia sau n imediata sa vecinătate; 4se aproximează mulțimea punctelor, cu suprafețe interpolatoare, astfel încât modelul numeric obținut s fie cât mai aproape de forma real.

Lucrarea cuprinde o metodologie pentru aproximarea unei mulțimi de puncte aparținând unei suprafețe, concave sau convexe, parte a unui corp 3D ce trebuie modelat în sesiuni asistate de calculator, cu suprafețe bicubice Bézier.

În literatura de specialitate sunt elaborate o serie de metode de potrivire (modelare) a mulțimii acestor puncte cu funcții interpolatoare cum ar fi: Spline, B-spline, Hermite, Bézier. Acest domeniu a fost şi este mult studiat de specialiştii în grafica asistată de calculator. Exemplu: Jaroslav Mackerle, în lucrarea *2D and 3D finite element meshing and remeshing, A bibliography (1990-2001)*, prezintă aproximativ 1727 de titluri de lucrări ce cuprind tehnici de modelare a formelor neregulate bi şi tridimensionale [1].

Pentru modelarea formei spațiale a calapodului, în lucrare se utilizează funcții interpolatoare Bézier. Acestea generează suprafețe 3D utilizate curent în grafica asistată de calculator.

Primul utilizator al acestor suprafețe este inginerul francez Pierre Bézier, care le-a definit şi aplicat în anul 1962 la proiectarea automobilelor [3]. Datorită posibilităților largi de utilizare ale acestora, precum şi flexibilității şi proprietăților sale, aceste funcții au fost utilizate în diverse aplicații de modelare tridimensională [4, 5]. Metoda de aplicare a acestor funcții în proiectare este diferită de la utilizator la utilizator [6, 7, 9, 12]. O metodă similară celei propuse, pentru aproximarea unui contur neregulat discretizat numeric prin digitizare, este prezentată în lucrarea *Curvature and the fairness of curves and surfaces'* [10].

Metoda poate fi aplicată pentru aproximarea unui corp 3D pe porțiuni [9, 11, 12]. Pentru aceasta, se delimitează pe suprafața corpului forme concave, convexe, mărginite de patru curbe, se creează modelul numeric al suprafeței de aproximat şi fiecare suprafață elementară se aproximează cu o suprafață bicubică Bézier de coordonate x(s,t), y(s,t), z(s,t).

În lucrare se elaborează metoda de aproximare a unei suprafețe elementare ce îndeplineşte următoarele condiții: este mărginită de 4 curbe şi punctele ce urmează să se aproximeze aparțin domeniului definit de cele 4 coordinates x(s,t), y(s,t), z(s,t).

The surface approximated in this paper has the following characteristics: it is limited by 4 curves and the points to be approximated belong to the domain defined by the 4 curves.

curbe.

Pentru aceasta se vor prezenta tehnici de obținere a curbelor bicubice Bézier, bi şi tridimensionale, şi a suprafețelor bicubice Bézier cu posibilitatea utilizării acestora pentru aproximarea unei mulțimi de puncte aparținând unor curbe şi suprafețe neregulate.

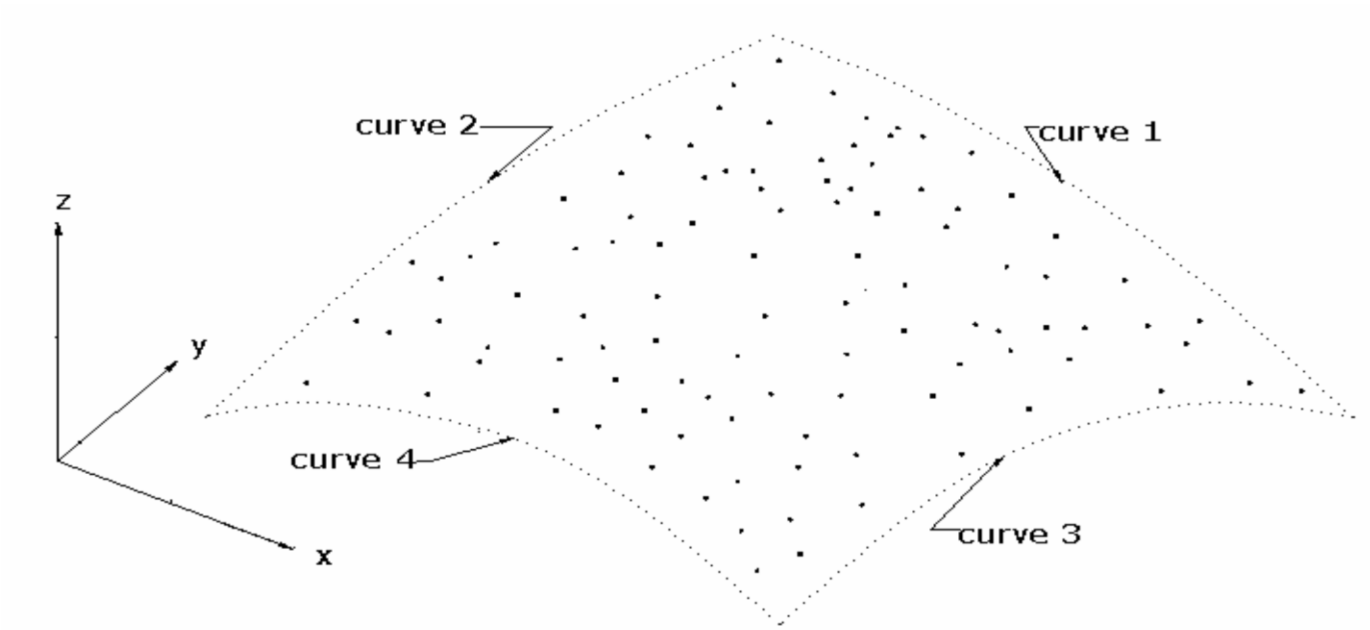

Figure 1. A spatial surface of numerical moldings
Figura 1. Formă spațială definită de 4 curbe şi o mulțime de puncte

Further on, we present techniques for obtaining Bézier bi-cubic surfaces, to further serve to approximate a group of points belonging to curves and irregular surfaces.

First, we determine the group of points belonging to the marginal curves and to the points limited by these curves (Fig. 1).

THE DEVELOPMENT OF THE NUMERIC PATTERN OF THE APPROXIMATED SURFACE

A concave or convex spatial surface limited by 4 curves is given (Fig. 1). The numeric pattern of the surface can be determined as follows:

- we digitize the surface's angles and the edges of the marginal curves of the surface (the surface's knots);

-we digitize the points belonging to the surface's edges;

Mulțimea punctelor aparținând curbelor marginale ale suprafeței de aproximat şi a punctelor mărginite de aceste curbe se obțin în sesiuni de modelare numerică a unui corp tridimensional (Fig. 1).

ELABORAREA MODELULUI NUMERIC AL SUPRAFEȚEI DE APROXIMAT

Se consideră o suprafață spațială concavă sau convexă mărginită de 4 curbe (Fig. 1). Modelul numeric al suprafeței se creează astfel:

- se determină valoarea numerică a colțurilor suprafeței, extremitățile curbelor marginale ce vor constitui nodurile suprafeței;

- secvențial, se discretizează într-o succesiune de puncte curbele ce formează marginile suprafeței;

-last, we digitize points belonging to the surface.

The points thus obtained will be approximated with a Bézier bi-cubic surface, with the coordinates x(s,t), y(s,t), z(s,t).

Bézier bi-cubic surfaces can approximated a group of points belonging to a three-dimensional surface, with a single parametrical function of two variables, s and t, in the form of x(s,t), y(s,t), z(s,t).

Next we will present bi- and three-dimensional Bézier bi-cubic curves, and the methods for obtaining the control points as well as the surface that approximates the digitized group of points.

2D Bézier bi-cubic curves

A bi-dimensional Bézier curve is defined by 4 points [13]:

- 2 points situated to the curve's limits (the knots), are marked (x_0, y_0) and (x_3, y_3) in the graphic.
- 2 other points situated on the tangents drawn from the curve, in the knots, named control points: (x_1, y_1) and (x_2, y_2) (Fig. 2).

A point from the curve has the coordinates: x(t), y(t), forming 2 bi-cubic polynoms:

- în continuare se discretizează într-o mulțime de puncte suprafața mărginită de cele 4 curbe.

Punctele astfel obținute se vor aproxima cu o suprafață bicubică Bézier de coordonate x(s,t), y(s,t), z(s,t).

Se utilizează această metodă deoarece, cu suprafețe bicubice Bézier, se poate aproxima o mulțime de puncte aparținând unei suprafețe tridimensionale, cu o singură funcție parametrică de două variabile s şi t de forma x(s,t), y(s,t), z(s,t).

În continuare se va proceda la o succintă prezentare a curbelor bicubice Bézier bi şi tridimensionale şi a metodelor de obținere a punctelor de control şi a suprafeței riglate ce aproximează mulțimea de puncte digitizată.

Curbe bicubice Bézier 2D

O curbă bicubică Bézier bidimensională este definită de patru puncte [13]: două puncte situate la capetele curbei, numite noduri notate (Fig. 2) (x_0, y_0) şi (x_3, y_3) şi alte două puncte situate pe tangentele duse la curbă, în noduri, numite puncte de control: (x_1, y_1) şi (x_2, y_2).

Un punct oarecare de pe curbă, P, are coordonatele x(t), y(t) de forma a două polinoame bicubice:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \tag{1}$$

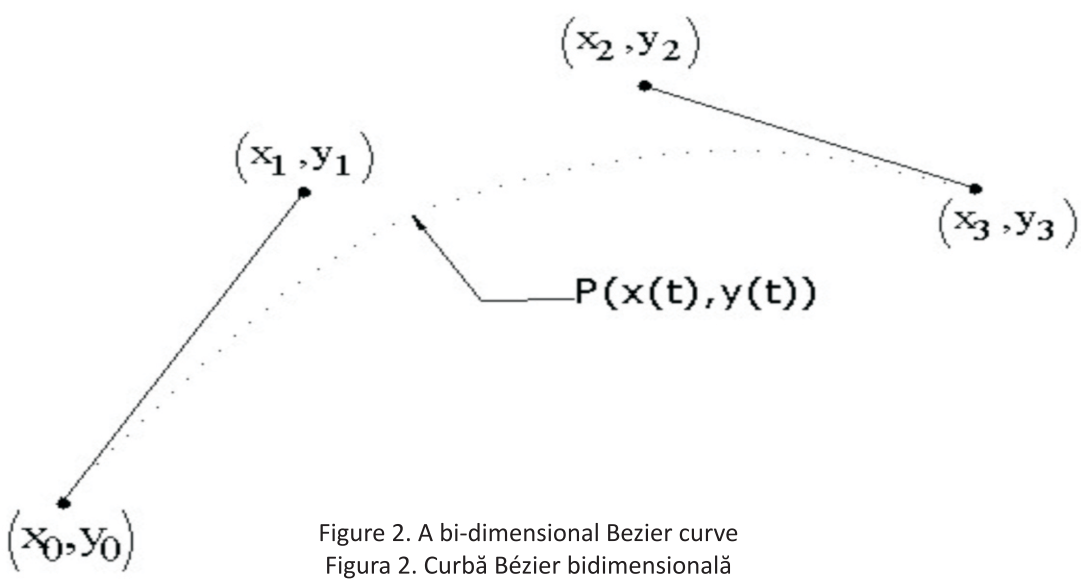

Figure 2. A bi-dimensional Bezier curve
Figura 2. Curbă Bézier bidimensională

The coefficients of the 2 polynoms are represented considering the coordinates of the 4 points, in the following mathematical equations:

Coeficienții celor două polinoame se reprezintă în funcție de coordonatele celor patru puncte sub forma:

$$\begin{aligned} &d_x=x_0 && d_y=y_0 \\ &c_x=3(x_1-x_0) && c_y=3(y_1-x_0) \\ &b_x=3(x_2-x_1)-c_x && b_y=3(y_2-y_1)-c_y \\ &a_x=x_3-x_1-c_x-b_x && a_y=y_3-y_1-c_y-b_y \end{aligned} \tag{2}$$

Consequently, the coordinates of a certain point of the curve can be obtained using the 2 knots and the other 2 control points. The matrix shape of these is:

Astfel, coordonatele unui punct al curbei pot fi obținute prin intermediul celor două noduri şi al celor două puncte de control. Forma matriceală a acestora este:

$$x(t)=[X][B][T]^t \qquad y(t)=[Y][B][T]^t \tag{3}$$

where:

unde :

$$\begin{aligned} &[X]=[x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3] \\ &[Y]=[y_0\ \ y_1\ \ y_2\ \ y_3] \\ &[T]=[t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1] \end{aligned} \tag{4}$$

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

called the Bézier matrix and t, a parameter of the interval [0,1].

numită în literatura de specialitate matricea Bézier şi t, un parametru aparținând intervalului [0,1].

The method for obtaining the Bézier curves allows [11, 12]:

1. Several curves can be defined between 2 points.

Thus, a succession of Bézier curves may be drawn by two points and selecting the one that approximates with the highest precision a point set whose coordinates are frequently placed between the 2 knots is selected.

Metoda de obținere a curbelor Bézier permite următoarele [11, 12]:

1. Între două puncte (noduri) se pot defini mai multe curbe. Această posibilitate conduce trasarea prin două puncte a unei succesiuni de curbe Bézier şi selectarea aceleia care aproximează cu cea mai mare precizie un nor de puncte ale căror coordonate se poziționează, cel mai frecvent, între cele două noduri.

2. Their analytic and graphic shape will determine the position of the control points, situated on the 2 tangents drawn to the curve. So, we can obtain concave or convex curves, if the control points are placed on the same side of the cord, and concave/convex curve if the control points are placed on both sides of the cord.

2. Forma analitică şi grafică a acestora va fi determinată de poziția punctelor de control situate pe cele două tangente trasate la curbă. Astfel, se pot obține: curbe concave sau convexe, dacă punctele de control se poziționează de aceeaşi parte a corzii şi curbe concav/convexe dacă punctele de control se poziționează de o parte şi alta a corzii.

3D Bézier bi-cubic curves

A 3D Bézier bi-cubic curve is defined similar to the 2D Bézier bi-cubic curve. This is defined by 4 points, 2 of them are fixed (knots) and the other 2 points are situated on the tangents to the curve from knots (control points). A point from the curve will have the coordinates x(t), y(t), z(t), according to the following equation:

Curbe bicubice Bézier 3D

O curbă bicubică Bézier 3D se defineşte similar cu o curbă bicubică Bézier 2D. Aceasta este definită de 4 puncte, din care două puncte fixe, noduri şi alte două puncte, situate pe tangentele la curbă, din noduri, numite puncte de control. Un punct oarecare al curbei va avea coordonatele x(t), y(t), z(t), a cărei formă este dată de relațiile:

$$x(t)=[X][B][T]^T \qquad y(t)=[Y][B][T]^T \qquad z(t)=[Z][B][T]^T \tag{6}$$

where the matrices [X], [Y], [B], [T] have the same significance as in the previous paragraph and [Z] is the coordinates' vector of the 4 points:

unde matricele [X], [Y], [B], [T] au aceeaşi semnificație ca în paragraful anterior şi [Z] este vectorul coordonatelor z ale celor 4 puncte:

$$[Z] = [z_0 \;\; z_1 \;\; z_2 \;\; z_3] \tag{7}$$

Similar to the observation presented in the previous paragraph, a 3D Bézier curve set can be drawn through 2 points defined by 2 fixed points and 2 other points situated on the tangents to the curve in the 2 points. This feature can be used to approximate group of points belonging to a three-dimensional curve with a Bézier curve.

Similar observației prezentate în paragraful anterior, prin două puncte se pot trasa o mulțime de curbe Bézier 3D, definite de două puncte fixe şi alte două puncte situate pe tangentele la curbă în cele două puncte. Această proprietate poate fi utilizată în aproximarea unei mulțimi de puncte aparținând unei curbe tridimensionale cu o curbă Bézier.

BÉZIER BI-CUBIC SURFACES

A spatial surface is formed by 2 curve families C, D of x(t), y(t), z(t) and x(s), y(s), z(s) equations respectively, in which s and t variables vary in the [0,1] domain. The two curve families define a bi-cubic surface in space. A point from the spatial surface has the P(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) coordinates.

In the reference literature [10, 11, 12, 14] a Bézier bi-cubic surface is defined by 16 control points whose position can be seen in Figure 3.

SUPRAFEȚE BICUBICE BÉZIER

O suprafață spațială este formată din două familii de curbe, C şi D, de ecuații x(t), y(t), z(t), respectiv x(s), y(s), z(s), ale căror variabile, s şi t, variază în domeniul [0,1]. Cele două familii de curbe definesc o suprafață bicubică în spațiu. Un punct oarecare de pe o suprafață spațială are forma P(x(s,t), y(s,t), z(s,t)).

În literatura de specialitate [10, 11, 12, 14], o suprafață bicubică Bézier este definită de 16 puncte de control a căror poziție poate fi urmărită în Figura 3.

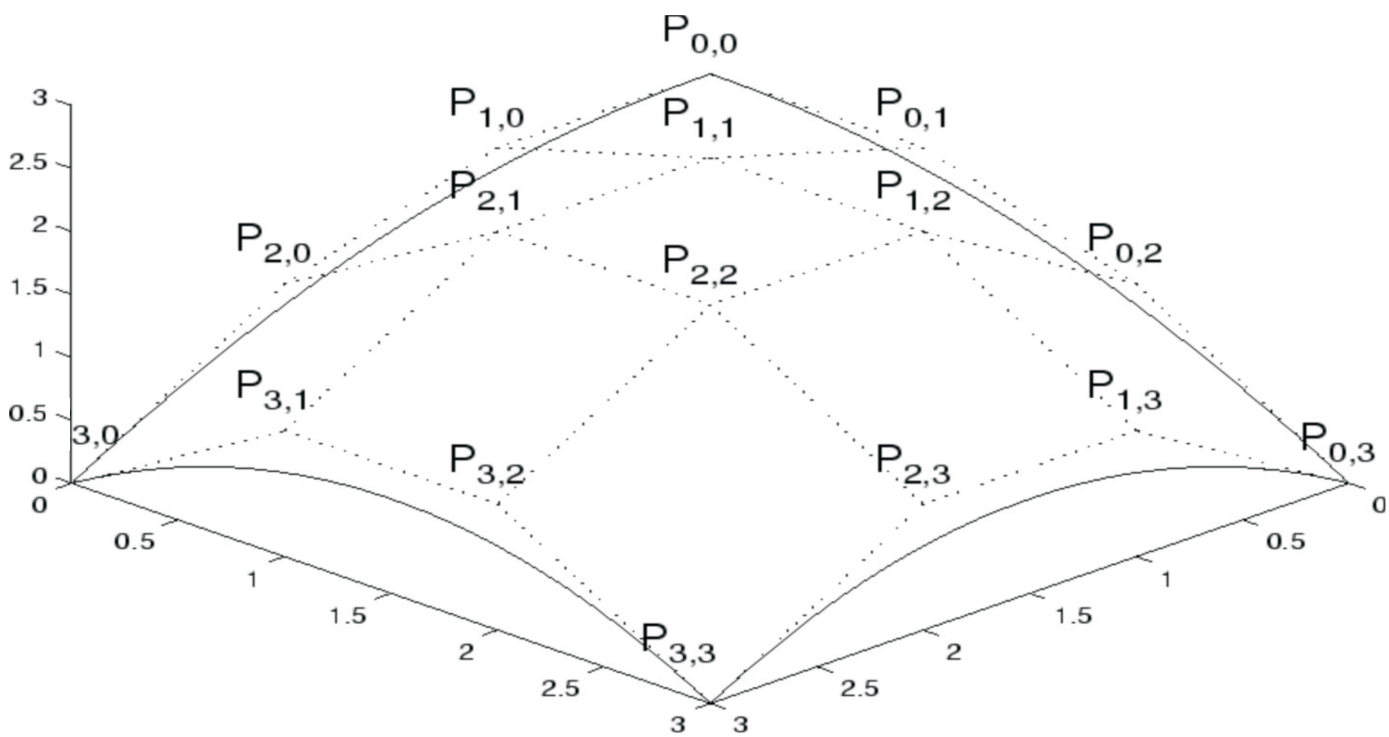

Figure 3. A Bezier bi-cubic surface
Figura 3. Suprafață bicubică Bézier

The matrix shape of a point's P coordinates belonging to a Bézier bi-cubic surface is the following:

Forma matriceală a coordonatelor unui punct P al unei suprafeței bicubice Bézier este următoarea:

$$x(s,t)=[S][B][X][B]^T[T]^T \quad y(s,t)=[S][B][Y][B][T] \quad z(s,t)=[S][B][Z][B][T] \tag{8}$$

where

- $[S] = [s^3 \ \ s^2 \ \ s \ \ 1]$, $[T] = [t^3 \ \ t^2 \ \ t \ \ 1]$, $[B]$ - the Bézier matrix presented in the previous paragraph and
- $[X]$ $[Y]$, $[Z]$ the matrix of the coordinates of the 16 control points:

unde

- $[S]= [s^3 \ \ s^2 \ \ s \ \ 1]$, $[T]= [t^3 \ \ t^2 \ \ t \ \ 1]$, $[B]$ – matricea Bézier prezentată în paragraful anterior
- $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ matricea coordonatelor celor 16 puncte de control de forma:

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

The form of [Y] and [Z] matrices is similar to that of matrix [X].

Forma matricelor [Y] şi [Z] este similară cu cea a matricei [X].

- the point's limits belonging to the curves will be the network's knots: P_0, P_1, P_2, P_3;

- from each knot we draw tangents to the set of points that limit the domain's endings and placed the two control points on the tangents: P_{01}, P_{02}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32};

- from each knot we will draw tangents to the set of points belonging to the interior of the domain limited by points of the 4 curves; we will place 4 other control points on the tangents: P_{03}, P_{13}, P_{23}, P_{33}, P_{31}.

A set of Bézier surfaces will result from varying the position of the 12 control points [12]. Only one Bézier surface will best approximate the initial point set.

In what follows, we will develop the following methods:

- the method for obtaining a tangent from a set of points belonging to a curve;

- the method for obtaining a tangent from a set of points belonging to a domain;

- the method for determining the 12 control points situated on the 12 tangents;

- the method for determining the points of the Bézier surface;

- determining the surface that covers the initial set of points.

Obtaining the equation of a tangent from a set of points belonging to a curve

The tangent's equation from a point to a set of points that approximate a curve is determined as follows:

- we draw a plan parallel with the xOy plane through each knot;

- we join the point (the surface's knot) with each point on the curve;

- we determine the angle between the segment that unites the two points and its projection on the previously built plane:

- extremitățile punctelor aparținând curbelor vor constitui nodurile rețelei punctelor P_0, P_1, P_2, P_3;

- la mulțimea punctelor ce delimitează marginile domeniului, din fiecare nod, se vor trasa tangentele pe care se vor poziționa câte două puncte de control, respectiv punctele: P_{01}, P_{02}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32};

- la mulțimea punctelor aparținând interiorului domeniului delimitat de puncte ale celor 4 curbe, din fiecare nod, se vor trasa pe tangente, pe care se vor poziționa alte 4 puncte de control, respectiv punctele: P_{01}, P_{02}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}.

Variind poziționarea punctelor de control pe cele 12 tangente precizate, se obține o mulțime de suprafețe Bézier, dintre care una va aproxima mulțimea inițială a punctelor.

În continuare se vor elabora următoarele metode:

- metoda de obținere a tangentei dintr-un punct la o mulțime de puncte aparținând unei curbe;

- metoda de obținere a tangentei dintr-un punct la o mulțime de puncte aparținând unui domeniu;

- determinarea celor 12 puncte de control situate pe cele 12 tangente;

- determinarea punctelor suprafeței Bézier;

- găsirea acelei suprafețe care acoperă mulțimea inițială a punctelor.

Obținerea ecuației tangentei dintr-un punct la o mulțime de puncte aparținând unor curbe

Ecuația tangentei dintr-un punct la o mulțime de puncte ce aproximează o curbă se determină astfel:

- prin fiecare nod se trasează un plan paralel cu planul xOy;

- se uneşte punctul – nodul suprafeței – cu fiecare punct al curbei (Fig. 5);

- se determină tangenta unghiului şi unghiul format dintre segmentul de dreaptă ce uneşte cele două puncte şi proiecția lui pe planul construit:

$$alfa_{ci} = atn\,\frac{Z_{ci} - Z_n}{dist} \tag{10}$$

An analysis of the 16 points that define a Bézier bi-cubic surface, allows the establishment of their position, the same with position of the Bézier curves. A Bézier bi-cubic surface is defined by fixed points (knots) and control points. Consequently, these 16 points that define the Bézier bi-cubic surface can be placed as follows:

- 4 points, the limits of the surface – the knots;
- 8 points situated on the tangents to the marginal curves of the surface, drawn from each knot;
- 4 points situated on the tangents from each knot to the point set belonging to the approximated domain.

O analiză a poziției celor 16 puncte ce definesc o suprafață bicubică Bézier permite precizarea poziției acestora, analog cu a curbelor bicubice Bézier. Se poate considera că o suprafață bicubică Bézier este definită de puncte fixe, noduri şi puncte de control. Astfel, cele 16 puncte necesare definirii unei suprafețe bicubice Bézier pot fi poziționate astfel:

- 4 puncte constituind extremitățile suprafeței – nodurile;
- 8 puncte situate pe tangentele la curbele marginale ale suprafeței, trasate din fiecare nod;
- 4 puncte situate pe tangentele, din fiecare nod, la mulțimea punctelor aparținând domeniului de aproximat.

Approximating a set of points with a Bézier bi-cubic surface

The method of definition of the Bézier surfaces suggested the following problem:

A spatial set of points, limited by points of 4 curves, can be approximated with a Bézier bi-cubic surface (Fig. 4). To determine the 16 control points, the set of points that has to be approximated will be used as follows:

Aproximarea unei mulțimi de puncte cu o suprafață bicubică Bézier

Modul de definire a suprafețelor Bézier a sugerat următoarea problemă:

O mulțime de puncte spațiale, mărginite de punctele a 4 curbe, poate fi aproximată cu o suprafață bicubică Bézier (Fig. 4). Pentru determinarea celor 16 puncte de control, mulțimea punctelor ce urmează să se aproximeze se va folosi astfel:

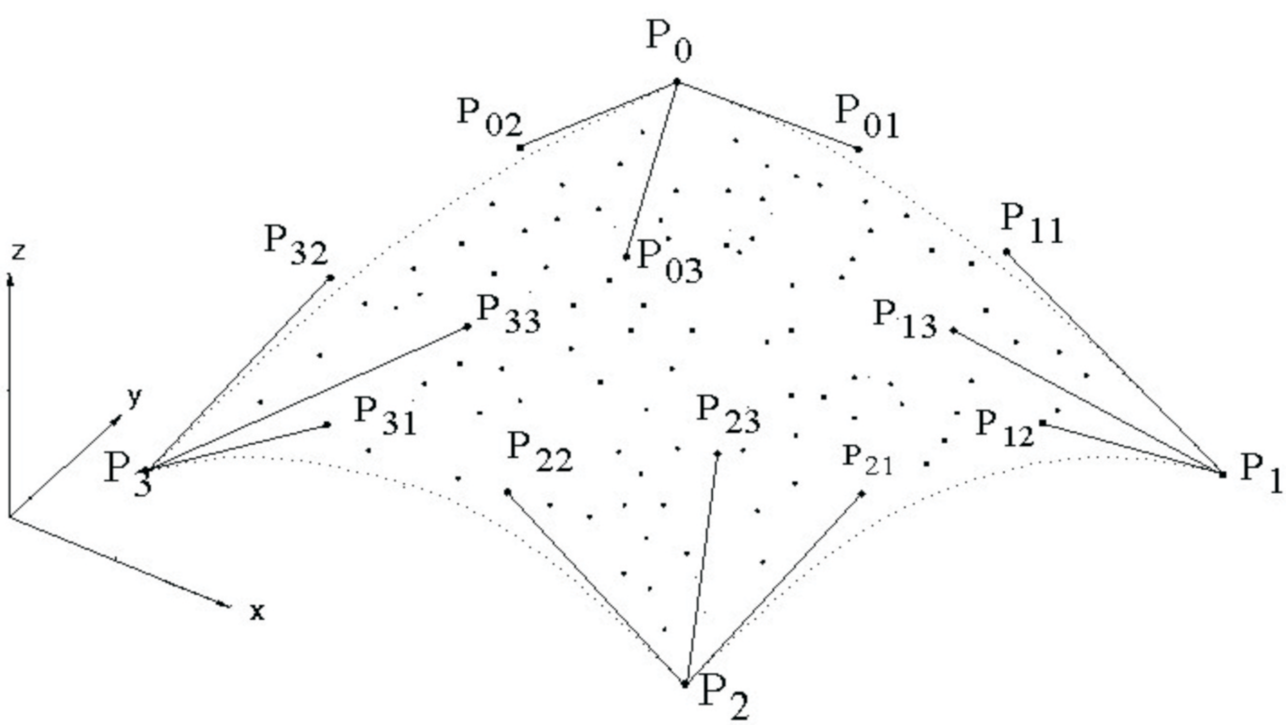

Figure 4. The position of the knots and of the control points for creating a Bézier bi-cubic surface
Figura 4. Poziția nodurilor şi a punctelor de control pentru crearea unei suprafețe Bézier

where:

- Z_n – the coordinate of the knot
- Z_{ci} – the coordinate of the curve
- dist – the distance between the points $P(x_n, y_n, z_n)$ and $P(x_{ci}, y_{ci}, z_{ci})$ and the xOy plane

unde:

- Z_n – coordonata primului nod
- Z_{ci} – coordonata Z a unui punct aparținând unei curbe marginale (C) definită de n_c puncte (Fig. 4).
- dist, distanța dintre proiecția celor două puncte $P(x_n, y_n, z_n)$ şi $P(x_{ci}, y_{ci}, z_{ci})$ pe planul xOy.

$$\text{dist} := \sqrt{\left(x_{ci} - x_n\right)^2 + \left(y_{ci} - y_n\right)^2} \tag{11}$$

- we select the larger angle from all the angles that resulted.

The segment corresponding to this angle represents the tangent from a knot to the succession of points that approximate a limit of the surface.

If we consider the knot, the point where will start the tangent with the coordinates (x_n, y_n, z_n) and a point of the border curve with the coordinates (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}), the equation of the tangent drawn to the set of points can be descried by the following equation:

- din mulțimea unghiurilor obținute se selectează unghiul cel mai mare;

Segmentul de dreaptă corespunzător acestui unghi reprezintă tangenta dintr-un nod la succesiunea de puncte ce aproximează o margine a suprafeței de aproximat.

Dacă considerăm nodul, punctul din care urmează să se traseze tangenta, de coordonate (x_0, y_0, z_0) şi un punct al curbei marginale, de coordonate (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}), ecuația tangentei dusă la mulțimea punctelor unei curbe va avea forma:

$$\frac{X - X_n}{X_{cm} - X_0} = \frac{Y - Y_n}{Y_{cm} - Y_0} = \frac{Z - Z_n}{Z_{cm} - Z_0} \tag{12}$$

where (X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}), represents the point set belonging to a curve.

cu $i=1..n_c$, unde n_c reprezintă mulțimea punctelor aparținând unei curbe.

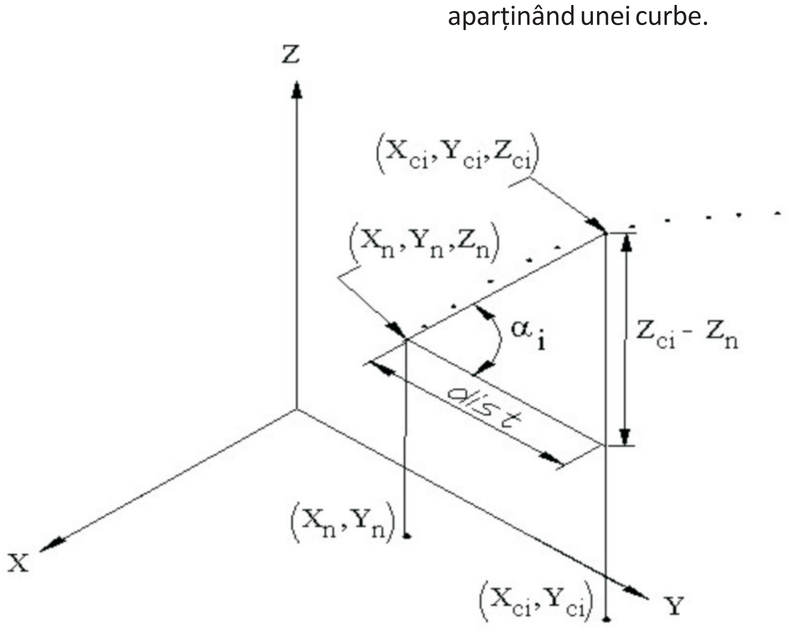

Figure 5. Determining the tangent's equation from a point to a set of points that approximate a curve
Figura 5. Determinarea ecuației tangentei la o curbă definită printr-o mulțime de puncte

Determining the equation of the tangent from a point to a set of points belonging to a domain limited by 4 curves

The method for the determination of a tangent from a point (more precisely, from the knot of the network) to a set of points belonging to a domain limited by 4 curves is similar to the one presented in the previous paragraph.

- we establish a point, one of the network's knots;
- we unite an extreme point of the surface, a knot, with each point belonging to the interior of the domain, limited by the 4 curves;
- we determine the maximum angle of the segments defined using a plan parallel with the xOy plan through the chosen knot;
- we write the equation line, whose form is similar with the one presented in the previous paragraph;

This is the equation of the tangent from a point to the set of points that resulted after the discretization of a surface.

Obținerea ecuației tangentei dintr-un punct la o mulțime de puncte aparținând unui domeniu mărginit de 4 curbe

Metoda de obținere a tangentei dintr-un punct, respectiv nod al rețelei, la o mulțime de puncte aparținând unui domeniu mărginit de 4 curbe este similară celei prezentate în paragraful anterior, după cum urmează:

- se consideră un punct, unul din nodurile rețelei;
- se uneşte un punct extrem al suprafeței, un nod, cu fiecare punct al mulțimii punctelor din interiorul domeniului mărginit de cele 4 curbe;
- se determină unghiul maxim al segmentelor astfel definite cu planul paralel cu xOy prin nodul ales;
- se scrie ecuația dreptei a cărei formă este similară cu cea prezentată în paragraful anterior, ce reprezintă ecuația tangentei dintr-un punct la o suprafață discretizată într-o mulțime de puncte.

Determining the control points situated on a tangent

In the previous paragraphs we presented a method for determining the tangents to the set of points. Every point from one of the tangents can be considered a control point of the Bézier surface. The general shape of the coordinates of these points is given by the relation:

Determinarea punctelor de control situate pe o tangentă

În paragrafele anterioare s-a prezentat metoda pentru determinarea tangentelor la mulțimea punctelor de aproximat. Oricare punct de pe una din aceste tangente poate fi considerat un punct de control al suprafeței Bézier.

Dacă se scrie ecuația tangentelor, trasată la mulțimea punctelor aparținând curbelor sau domeniului, dintr-un nod P_n, sub forma:

$$\frac{X-X_n}{X_i-X_n} = \frac{Y-Y_n}{Y_i-Y_n} = \frac{Z-Z_n}{Z_i-Z_n} = \lambda_{nk} \qquad (13)$$

n – the number of the node = 0, 1, 2, 3
k – 0, 1, 2, 3 the number of the tangent drawn from the k knot
X_i, Y_i, Z_i – the coordinates of the points to which we draw the tangent

The coordinates of a point on the tangent can be established by the following relations:

n- numărul nodului=0,1,2,3
k=0,1,2,3 numărul tangentei trasate din nodul k
X_i, Y_i Z_i coordonatele mulțimii punctelor la care se trasează tangenta, atunci coordonata unui punct ce aparține acestor tangente are forma:

$$X= X_n+\lambda_{nk}(X_i-X_n) \qquad Y= Y_n+\lambda_{nk}(Y_i-Y_n) \qquad Z= Z_n+\lambda_{nk}(Z_i-Z_n) \qquad (14)$$

where λ_{nk} is a parameter whose value depends on the position of the control point. Thus, each control point depends on the λ parameter.

unde λ_{nk} este un parametru de a cărei valoare depinde poziția punctului de control. Astfel, fiecare punct de control depinde de câte un parametru λ.

The coordinates of the control points that have been determined, together with the coordinates of the knots, help determine the coefficients of the bicubic polynoms x(s,t), y(s,t), z(s,t) that generate a Bézier surface.

The selection of that surface which approximates the initial point set

From what has been previously presented we conclude that the 12 control points can overpass the 12 tangents, whose analytic representation is function for λ_{nk}. A point on each tangent, together with the 4 knots, determines a Bézier bi-cubic surface (Fig. 6). Varying the positioning of the control points on the 12 tangents, using several steps, we can obtain more sets of Bézier surfaces, and one of them approximates the initial point set.

Coordonatele punctelor de control astfel obținute împreună cu coordonatele nodurilor permit obținerea coeficienților polinoamelor bicubice x(s,t), y(s,t), z(s,t), ce generează o suprafață bicubică Bézier.

Selectarea acelei suprafețe care aproximează mulțimea inițială a punctelor

Din cele prezentate anterior rezultă că cele 12 puncte de control pot parcurge cele 12 tangente, a căror reprezentare analitică este cunoscută. Câte un punct de pe fiecare tangentă, împreună cu cele 4 noduri, determină o suprafață Bézier bicubică. Variind poziția punctelor de control pe cele 12 tangente precizate, se obține o mulțime de suprafețe Bézier din care una aproximează mulțimea inițială a punctelor (Fig. 6).

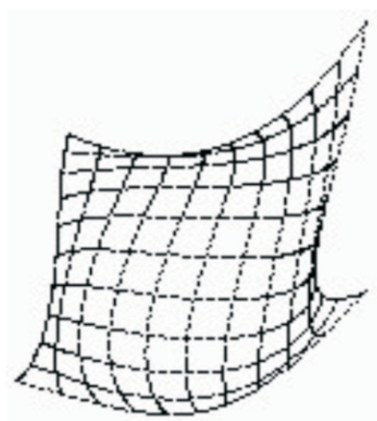

Figure 6. A point on each tangent, together with the 4 knots, determines a Bézier bi-cubic surface
Figura 6. Câte un punct de pe fiecare tangentă, împreună cu cele 4 noduri, determină o suprafață Bézier bicubică

Consequently, it is necessary to specify the coordinates of the 12 control points that are selected from a point set in order to determine the surface that approximates a point set with the highest precision.

We have developed the following method for the selection of the points.

In 12 steps, after λ_{nk}, n=[0,3] k=[1,3] we determined:

- the coordinates of the control points with relation 14;
- the coordinates x(s,t), y(s,t), z(s,t) of the

Pentru generarea acelei suprafețe care aproximează cu cea mai mare precizie o mulțime de puncte este necesară precizarea coordonatelor celor 12 puncte de control ce se selectează dintr-o mulțime de puncte.

Pentru selecția acestora în lucrare s-a elaborat următorul procedeu:

În 12 cicluri iterative, după λ_i, i=[1,12] se determină:

- coordonatele punctelor de control cu relația 14;
- împreună cu cele 4 coordonate ale nodurilor se

Bézier surface.

At each step of the cycle we compared the z coordinates of the Bézier surface resulted, namely z(s,t), for s and t belonging to the [0,1] interval, with the z coordinates of the initial points belonging to the domain.

The 12 cycles are terminated if the maximum and minimum of the z coordinates of the Bézier curve, namely max{z(s,t)}and min {z(s,t)}are approximately equal with the minimum and maximum of the z coordinates of the initial points, belonging to the domain.

With the control points determined with this method, we generate the Bézier surface that approximates an initial point set.

RESULTS AND DISCUSSIONS

Using this method the spatial format of the shoe last can be executed. The boundary of the shoe last are the curves of the Bézier surface and, using session for digitization, on defined initial point set (Fig. 7).

determină coordonatele: x(s,t), y(s,t), z(s,t) ale suprafeței Bézier.

La fiecare pas al ciclului se compară coordonatele z ale suprafeței Bézier obținute, respectiv z(s,t), pentru s, t aparținând intervalului [0,1] cu coordonatele z ale punctelor inițiale aparținând domeniului.

Încheierea celor 12 cicluri iterative se execută dacă maximul şi minimul coordonatei z a curbei Bézier generate, respectiv max {z(s,t)} şi min {z(s,t)}, sunt aproximativ egale cu maximul şi minimul coordonatelor z ale punctelor inițiale, aparținând domeniului.

Cu punctele de control astfel găsite se generează suprafața Bézier care aproximează o mulțime de puncte inițiale.

REZULTATE

Metoda a fost verificată pentru modelarea mai multor forme spațiale oarecare şi specifice încălțămintei. În figurile de mai jos sunt prezentate rezultate obținute pentru modelarea formei spațiale a calapodului definit de 4 curbe (Fig. 7).

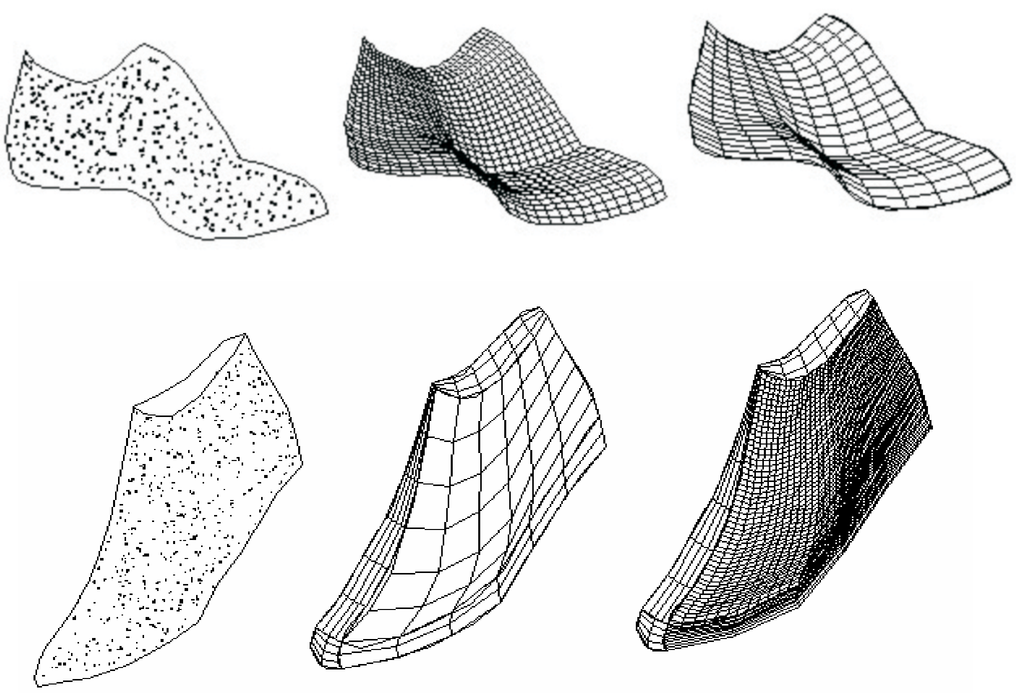

Figure 7. Approximating the set of points of the shoe last with a Bézier bi-cubic surface
Figura 7. Aproximarea formei spațiale a calapodului cu suprafețe bicubice Bézier

CONCLUSIONS

The method we developed can be used to approximate a three-dimensional concave or convex shape that has been numerically modeled. Moreover, the method can be applied to a three-dimensional body on concave and convex portions.

The method is extremely useful in modeling boot lasts, in footwear industry.

The method can be improved. Moreover, the criteria for obtaining that surface for which z maximum coordinate of the point set is approximately equal with the z maximum coordinate of the Bézier bi-cubic surface, does not necessarily lead to creating a surface that has to pass through the majority of the initial points. This criterion can be replaced with another one, based on the difference between the volume obtained by the initial point set with the xOy plane, and the point set belonging to the surface generated with the xOy plane.

CONCLUZII

Metoda elaborată permite aproximarea unei forme tridimensionale modelate numeric, de formă concavă sau convexă.

Metoda s-a elaborat din necesitatea modelării spațiale a calapodului, corp absolut necesar în sesiuni de proiectare a produselor de încălțăminte.

Metoda este perfectibilă. Astfel, criteriul de obținere al acelei suprafețe pentru care coordonata z maximă a mulțimii de puncte este aproximativ egală cu coordonata z maximă a suprafeței bicubice Bézier generate, nu conduce neapărat la crearea unei suprafețe care să treacă prin majoritatea punctelor inițiale. Acest criteriu poate fi înlocuit cu un altul ce se bazează pe diferența dintre volumul obținut de mulțimea punctelor inițiale şi planul xOy şi mulțimea punctelor aparținând suprafeței generate şi planul xOy.

REFERENCES

1. Mackerle, J., 2D and 3D finite element meshing and remeshing, a bibliography (1990-2001), *Eng Computations*, **2001**, 18, 8, 1108-1197.
2. Stan, M., Visileanu, E., Ghituleasa, C., Ciocoiu, M., Virtualization of the textile product design activity (in Romanian), *Textile Industry*, **2006**, 3.
3. Bézier, E., Courbes et Surfaces. Mathmatiques et CAO, **1986**, Hermes, Paris, 69-73.
4. Kaufmann, M., Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms, **1990**, Hardcover.
5. Boehm, W., Prautzsch, H., Numerical Methods, **1993**, AK Peters, Ltd.
6. Prautzsch, H., Boehm, W., Bézier and B-Spline Techniques Cheapest Online, **1995**, Hartmut Springer Verlag.
7. Rogers, D.F., Adams, J.A., Mathematics for computer graphics application, **1990**, WCB/McGraw-Hill.
8. Stone, J.A.R., Dog and tricks, some mathematics for students of graphics, *Technique mathematics and its application*, **2005**, Oxford University, 24, 4, 192-2002.
9. Farin, G., Rein, G., Sapidis, N., Worsey, A.J., Fairing cubic B-spline curves, **1987**, *Comput Aided Geom D*, 4, 91-103.
10. Farin, G., Sapidis, N., Curvature and the fairness of curves and surfaces, **1989**, *IEEE Comput Graph & Appl*, 52-57.
11. Cinque, L., Levialdi, S., Malizia, A., Shape description using cubic polynomial Bézier curves, *Pattern Recog Lett,* **1998**, 19, 821–828.
12. Pala, S., Gangulyb, P., Cubic Bézier approximation of a digitized curve, **2007**, *Pattern Recog Lett* 40, 2730-2741.
13. Drişcu, M., Mihai, A., CAD procedure for patterns with Bézier curves, *Textile Industry*, **2009**, 5.
14. Chang, H.H., Yan, H., Vectorization of hand-drawn image using piecewise cubic Bézier curves fitting, *Pattern Recog Lett*, **1998**, 31, 1747-1755.